3. Ecuaciones diferenciales de orden superior

(© Chema Madoz, VEGAP, Madrid 2009)

Ecuaciones lineales: teoría básica

Un **problema de valor inicial de *n*-ésimo orden** consiste en resolver la EDO lineal:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeta a las ***n* condiciones iniciales***:*

$$y(x_0) = y_0 \;,\; y'(x_0) = y_1 \;,\; \cdots \;,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Resolverlo consiste en encontrar una función y(x) en definida en un intervalo I que contiene a x_0, donde se cumplen la ecuación y las condiciones iniciales.

Existencia de una solución única
(Condición suficiente)

Sea $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, …, $a_0(x)$, y $g(x)$ continuas en I, con $a_n(x) \neq 0$ para todo x *de* I. Si $x = x_0$ es cualquier punto de este intervalo, entonces existe una solución $y(x)$ del problema anterior en I y es única.

- Ejemplo:

$$3y''' + 5y'' + y' + 7y = 0,\ y(1) = 0\ ,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0$$

posee la solución trivial $y(x) = 0$. Como es una ED de tercer orden lineal con coeficientes constantes, $y(x) = 0$ es la única solución en cualquier intervalo que contenga a $x = 1$.

- Ejemplo: Comprueba que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es la única solución de

$$y''-4y = 12x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 1$$

La ED es lineal, los coeficientes y $g(x)$ son todos funciones continuas, y $a_2(x) = 1$ es distinto de 0 en cualquier intervalo que contenga $x = 0$. La solución propuesta cumple la EDO y es única en *I*.

Comprueba que $y = cx^2 + x + 3$ es solución del PVI:

$$x^2 y'' - 2y' + 2y = 6, \qquad y(0) = 3\,,\ y'(0) = 1$$

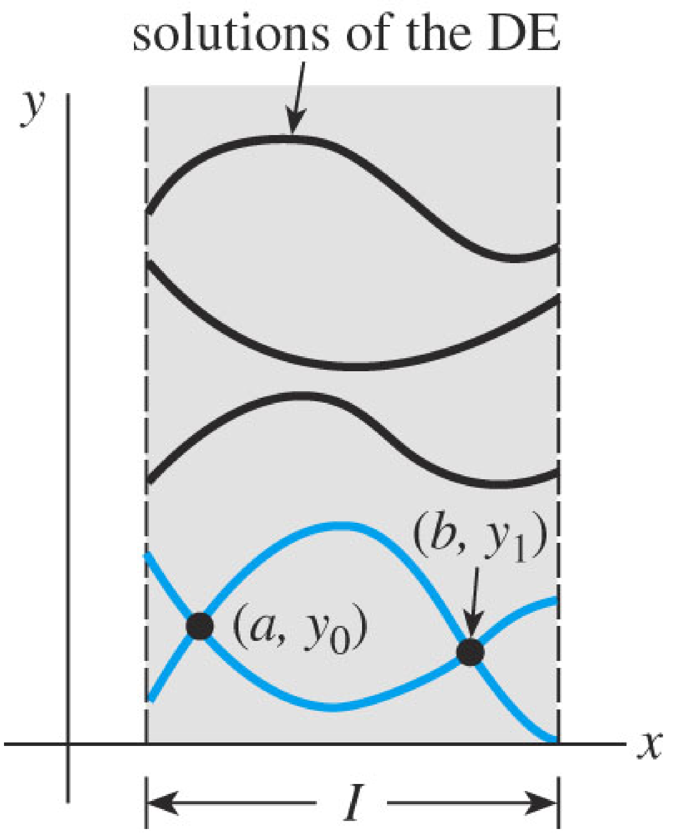
en toda la recta real. Este PVI tiene infinitas soluciones. Observa que el coeficiente de la derivada $a_2(x) = x^2$ más alta se hace cero en $x = 0$ y ese punto necesariamente tiene que estar incluido en *I* porque lo imponen las condiciones iniciales.

Problemas de valores en la frontera

- *Resolver:* $$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

  sujeta a : $$y(a)=y_0\ ,\ y(b)=y_1$$

  se llama ***problema de valor en la frontera*** (***PVF***) y a las restricciones se conocen como **condiciones de contorno o condiciones en la frontera.**



Nota: Las condiciones de contorno pueden ser también sobre las derivadas.

Vimos que $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ era solución de

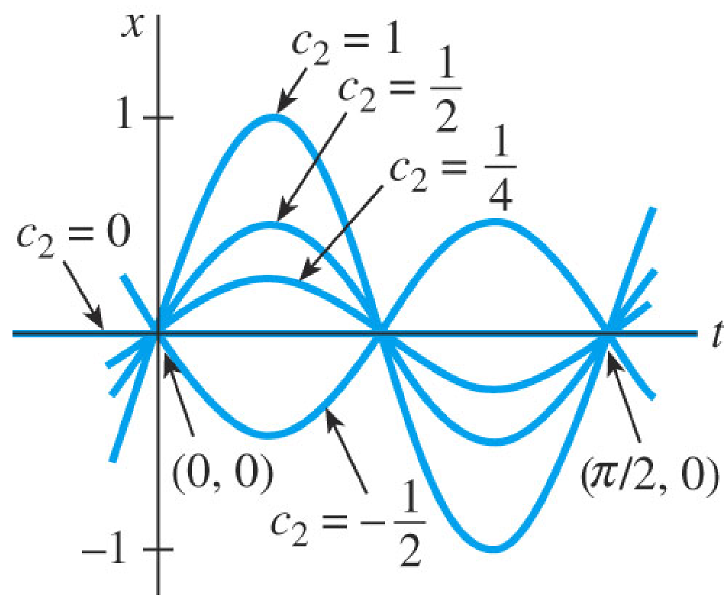
$$x''+16x=0$$

(a) Supongamos el PVF $x''+16x=0\,, x(0)=0\,, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Si $x(0) = 0$, entonces $c_1 = 0$, y $x(t) = c_2$ sen $4t$.
Si $x(\pi/2) = 0$, obtenemos $0 = 0$ independientemente de c_2. De modo que tenemos **infinitas soluciones**.

(b) Si $x''+16x=0\,, x(0)=0\,, x\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$

tenemos que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$:
$x(t) = 0$, **solución única**.



(c) Si $x''+16x=0\,, x(0)=0\,, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
tenemos que $c_1 = 0$, y $1 = 0$
(contradicción). **No hay solución**.

La siguiente EDO lineal de orden *n*:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

se dice que es ***no homogénea.***

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

si $g(x) = 0$ la ecuación es ***homogénea***.

Veremos que para resolver una ecuación no homogénea tendremos que resolver también la ecuación homogénea asociada.

Operadores diferenciales

- Sea $Dy = dy/dx$. Al símbolo D se le llama ***operador diferencial***. Definimos a un operador diferencial de n-ésimo orden u operador polinominal como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

- El operador diferencial L es un ***operador lineal:***

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x))$$

Podemos escribir las EDOs anteriores simplemente como

$L(y) = 0$ y $L(y) = g(x)$

Principio de superposición
(ecuaciones homogéneas)

Sean y_1, y_2, …, y_k soluciones de una ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Ejemplo: Las funciones $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 \ln x$ son ambas soluciones en $(0, \infty)$ de $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$

Luego $y = x^2 + x^2 \ln x$ también es una solución en $(0, \infty)$.

Nota:

(A) $y(x) = cy_1(x)$ también es solución si $y_1(x)$ es una solución.

(B) Una ED lineal homogénea siempre posee la solución trivial $y(x) = 0$.

Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ es **linealmente dependiente** en un intervalo I, si existen ciertas constantes c_1, c_2, …, c_n ***no todas nulas,*** tales que:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

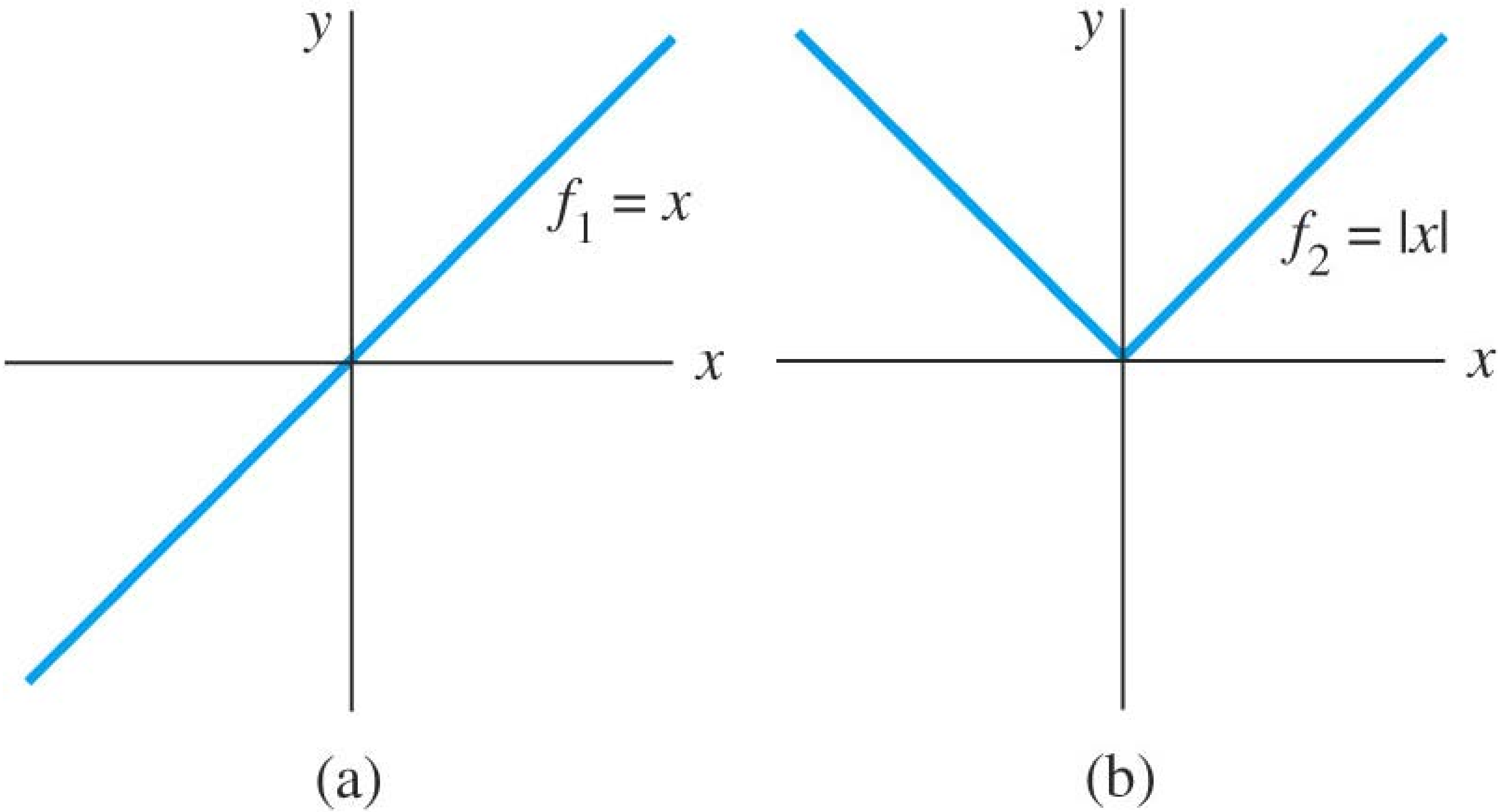
Si el conjunto no es linealmente dependiente, entonces es **linealmente independiente**.

En otras palabras, si el conjunto es linealmente independiente, cuando:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

entonces necesariamente $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

¿Son estas funciones linealmente independientes?



$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

Ejemplo: Las funciones $f_1 = \cos^2 x$, $f_2 = \sin^2 x$, $f_3 = \sec^2 x$, $f_4 = \tan^2 x$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ porque

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$$

con $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$.

Ejemplo: Las funciones $f_1 = x^{1/2} + 5$, $f_2 = x^{1/2} + 5x$, $f_3 = x - 1$, $f_4 = x^2$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$, porque

$$f_2 = 1 \cdot f_1 + 5 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4$$

Wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ posee al menos n – 1 derivadas. El determinante

$$W(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se llama el ***Wronskiano*** de las funciones.

TEOREMA

Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ soluciones de una ED homogénea de n-ésimo orden en un intervalo *I*. Este conjunto de soluciones es linealmente independiente si y sólo si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ para todo x en el intervalo.

DEFINICIÓN

Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ de n soluciones linealmente independientes de una ED homogénea de n-ésimo orden se llama ***conjunto fundamental de soluciones***.

TEOREMA

Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para una ED lineal homogénea de orden n en un intervalo *I*.

TEOREMA

Solución general (ecuaciones homogéneas)

Sea $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de nuestra ED lineal homogénea en un intervalo *I*. Entonces la solución general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

donde c_i son constantes arbitrarias.

- Las funciones $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de

  $y'' - 9y = 0$ en $(-\infty, \infty)$

  Observa que

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

  para todo *x.* Luego son independientes.

  Así que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general.

Por ejemplo, la función $y = 4 \sinh(3x) - 5e^{3x}$ es una solución. Observemos que

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} = 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x} = 4 \sinh 3x - 5e^{-3x}$$

- Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ son soluciones de $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ en $(-\infty, \infty)$. Como

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de *x*.

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ es la solución general en $(-\infty, \infty)$.

TEOREMA

Solución General

(Ecuaciones no homogéneas)

Sea y_p cualquier solución particular de una EDO no homogénea en un intervalo *I*. Y sea $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_k(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de su EDO homogénea asociada, entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k + y_p$$

donde las c_i , $i = 1,2,\dots,n$ son constantes arbitrarias

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k + y_p = y_c + y_p$$

= ***función complementaria + una solución particular***

- La función y_p = -(11/12) – ½ x es una solución particular de

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$$

TEOREMA

Principio de superposición
(ecuaciones no homogéneas)

Dadas k EDOs

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x)$$

con $i = 1, 2, \ldots, k$.

Si y_{pi} denota una solución particular de la ED i-ésima correspondiente a $g_i(x)$, tenemos que

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$$

- Observemos que

y_{p1} = $-4x^2$ es una solución particular de

$$y''-3y'+4y=-16x^2+24x-8$$

y_{p2} = e^{2x} es una solución particular de

$$y''-3y'+4y=2e^{2x}$$

y_{p3} = xe^x es una solución particular de

$$y''-3y'+4y=2xe^x-e^x$$

Entonces $y=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$ es una solución de

$$y''-3y'+4y=\underbrace{-16x^2+24x-8}_{g_1(x)}+\underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)}+\underbrace{2xe^x-e^x}_{g_3(x)}$$

Reducción de orden

Sabemos que la solución general de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

es $y = c_1y_1 + c_2y_1$.

Supongamos que $y_1(x)$ denota una solución conocida (no trivial). Puesto que la solución y_2 es linealmente independiente, supongamos que $y_2(\mathrm{x}) = u(x)\, y_1(\mathrm{x})$. Nuestro objetivo será encontrar una tal $u(x)$. El método se conoce como ***reducción de orden.***

Dada $y_1 = e^x$ solución de $y'' - y = 0$, hallar la segunda solución y_2 por el método de reducción de orden.

Solución

Si $y(x) = u(x)e^x$, entonces

$$y' = ue^x + e^x u' \, , \; y'' = ue^x + 2e^x u' + e^x u''$$

que sustituyendo en la EDO: $y'' - y = e^x(u'' + 2u') = 0$

Como $e^x \neq 0$, nuestra EDO se convierte en: $u'' + 2u' = 0$

Ahora "reduciremos" el orden de la ED gracias al cambio: $\longrightarrow$ $w' + 2w = 0$

$w = u'$

que integrando por separación de variables y deshaciendo el cambio, nos proporciona:

$$w = c_1 e^{-2x} = u'$$

$$u = -1/2\, c_1 e^{-2x} + c_2$$

Hemos hallado la segunda solución y_2 por el método de reducción de orden:

$$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2 e^x$$

Recordemos que teníamos $y_1 = e^x$ como primera solución de $y'' - y = 0$. Si tomamos $c_2 = 0$, $c_1 = -2$ para nuestra segunda solución, tenemos $y_2 = e^{-x}$.

Observa que $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para todo x, de modo que las soluciones son independientes.

Caso general

- Escribimos la EDO en la ***forma estándar***

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la EDO e $y_1(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo.

- Si definimos $y(x) = u(x)y_1(x)$, tenemos

$$y' = uy_1' + y_1u' \,,\ y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy$$

$$= u[\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{\text{cero}}] + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

$$y_1 u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

empleando el cambio $w = u'$.

$$y_1 w' + (2y_1' + Py_1)w = 0 \longrightarrow y_1 \frac{dw}{dx} + (2y_1' + Py_1)w = 0$$

Dividiendo entre $y_1 w$ y multiplicando por dx:

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx = -Pdx \qquad \int \frac{dw}{w} + 2\int \frac{y_1'}{y_1}dx = -\int Pdx + c$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int Pdx + c \qquad wy_1^2 = c_1 e^{-\int Pdx}$$

Luego $$u = c_1 \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx + c_2$$

Tomando $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, obtenemos

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

La función $y_1 = x^2$ es una solución de

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Hallar la solución general en $(0, \infty)$.

Solución:

La forma estándar es $$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} = 0$$

Dando los pasos anteriores, demuestra que:

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4} dx = x^2 \ln x$$

La solución general es: $$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

- La ecuación diferencial ay´ + by = 0 se resuelve ya sea mediante separación de variables o mediante la ayuda de un factor integrante.
- Observa que si despejamos y´ de la ecuación diferencial ay´ + by = 0 se obtiene y´ = ky, donde k es una constante.

Esto nos revela la "naturaleza" de la solución: la única función elemental no trivial cuya derivada es una múltiplo de si misma es la función exponencial, $y(x) = e^{mx}$. Lo que resta será determinar el valor de m...

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

donde a_i son constantes, $a_n \neq 0$.

Ecuación o polinomio auxiliar :

Para n = 2, $ay'' + by' + cy = 0$

Si probamos $y(x) = e^{mx}$,

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \qquad \boxed{am^2 + bm + c = 0}$$

obtenemos la ***ecuación auxiliar.***

$$am^2 + bm + c = 0$$

Las dos raíces del polinomio auxiliar son:

$$m_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

$$m_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

(1) $b^2 - 4ac > 0$: *reales y distintas*, $m_1 \neq m_2$.
(2) $b^2 - 4ac = 0$: *reales e iguales*, $m_1 = m_2 = -b/(2a)$.
(3) $b^2 - 4ac < 0$: *complejas conjugadas*,

$$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta$$

- ***Caso 1: Raíces reales y distintas***
  La solución general es

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

¿Por qué?

- ***Caso 2: Raíces reales repetidas***

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

Para obtener la segunda solución utilizamos el método de reducción de orden, recordando que *$m_1 = m_2 = -b/(2a)$.*

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}$$

La solución general es

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}}$$

- ***Caso 3: Raíces complejas conjugadas***

Escribimos $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$, una solución general es $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin\beta x$$

Como $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ es solución general, tomando $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, tenemos dos soluciones:

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

Así, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}$ sen βx son un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right)}$$

- Resolver las EDs siguientes:

(a) $2y''-5y'-3y=0$

$$2m^2-5m-3=(2m+1)(m-3)\ ,\quad m_1=-1/2\ ,\quad m_2=3$$

$$y=c_1e^{-x/2}+c_2e^{3x}$$

(b) $y''-10y'+25y=0$

$$m^2-10m+25=(m-5)^2\ ,\quad m_1=m_2=5$$

$$y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$$

(c) $y''+4y'+7y=0$

$$m^2+4m+7=0\ ,\quad m_1=-2+\sqrt{3}i\ ,\quad m_2=-2-\sqrt{3}i$$

$$\alpha=-2\ ,\quad \beta=\sqrt{3}\ ,\quad y=e^{-2x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2 sen\sqrt{3}x)$$

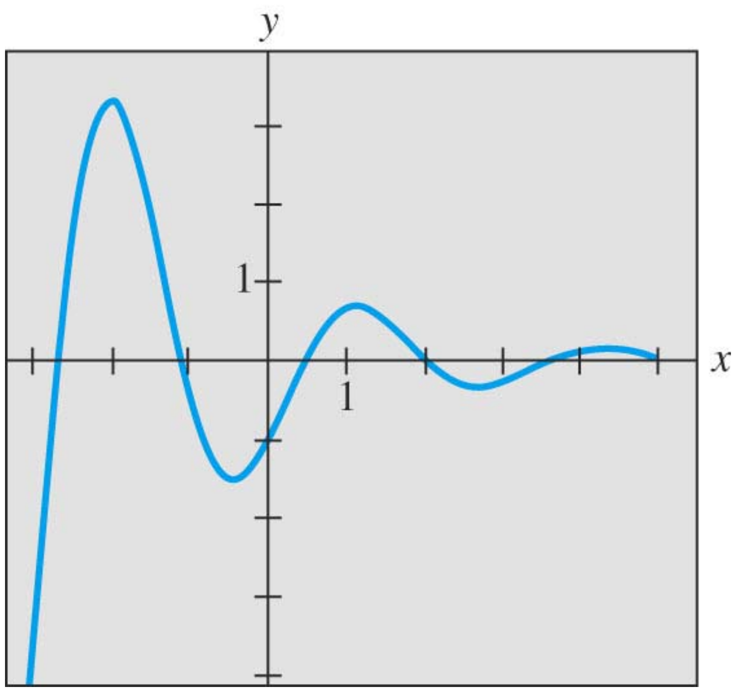
Resolver $4y''+4y'+17y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=2$

Solución:

$$4m^2+4m+17=0, \quad m_1=-1/2\pm 2i$$

$$y=e^{-x/2}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

$$y(0)=-1,\ c_1=-1, \quad \text{e} \quad y'(0)=2, \quad c_2=3/4$$



Resolver las ecuaciones:

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad y'' - k^2 y = 0, \quad k > 0$$

Para la primera ecuación : $y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

Para la segunda ecuación : $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$

Como

$$y_1 = 1/2(e^{kx} + e^{-kx}) = \cosh(kx)$$

$$y_2 = 1/2(e^{kx} - e^{-kx}) = \sinh(kx)$$

Luego

$$y = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)$$

Ecuaciones de orden superior

Dada la EDO:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

La ecuación asociada

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

se llama su ***ecuación auxiliar*** .

Resolver $y''' + 3y'' - 4y = 0$

Solución:

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m-1)(m^2 + 4m + 4) = (m-1)(m+2)^2$$

$$m_2 = m_3 = -2$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$$

Resolver $\dfrac{d^4 y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

Solución:

$$m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_3 = i,\ m_2 = m_4 = -i$$

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + C_3 x e^{ix} + C_4 x e^{-ix}$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

Raíces complejas repetidas

- Si $m_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad k, entonces $m_2 = \alpha - i\beta$ es también una raíz compleja de multiplicidad k. Las $2k$ soluciones linealmente independientes son :

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\; xe^{\alpha x}\cos\beta x\,,\; x^2e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\;\cdots,\; x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}sen\beta x\,,\; xe^{\alpha x}sen\beta x\,,\; x^2e^{\alpha x}sen\beta x\,,\;\cdots,\; x^{k-1}e^{\alpha x}sen\beta x$$

Coeficientes indeterminados

Si queremos resolver

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Tenemos que hallar $y = y_c + y_p$. Veamos cómo hacerlo, en este caso general, mediante el método conocido como de ***coeficientes indeterminados***.

Coeficientes indeterminados

Simplemente haremos una conjetura sobre la forma de la posible solución particular a partir de la g(x) que deberá ser un polinomio, seno o coseno, exponencial o combinación lineal de todas ellas...

Gracias a que las derivadas de las combinaciones lineales de estas funciones vuelven a ser ellas mismas, parece razonable que busquemos soluciones particulares de la misma forma...

Vamos a ilustrar la idea con algunos ejemplos →

Resolver $y''+4y'-2y=2x^2-3x+6$

Solución:

Ya sabemos cómo obtener una solución y_c de la ecuación homogénea asociada. Ahora, queremos hallar y_p.

Como el lado derecho de la ED es un polinomio, supondremos $y_p = Ax^2 + Bx + C$, entonces, tras sustituir: $y_p' = 2Ax + B,\ \ y_p'' = 2A$

$2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6$

$$-2A = 2\,,\ 8A - 2B = -3\,,\ 2A + 4B - 2C = 6$$

$$A = -1,\ B = -5/2,\ C = -9$$

$$\boxed{y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9}$$

Hallar una solución particular de

$$y''-y'+y=2sen(3x)$$

Solución:

Probemos $y_p = A\cos(3x) + B\,\text{sen}(3x)$

Tras sustituir,

$$(-8A-3B)\cos(3x)+(3A-8B)\sin(3x)=2\sin(3x)$$

Luego

$$A=6/73,\; B=-16/73$$

$$\boxed{y_p=\frac{6}{73}\cos(3x)-\frac{16}{73}sen(3x)}$$

Resolver $$y''-2y'-3y=4x-5+6xe^{2x}$$

Solución:

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$$ Solución homogénea

Pensando en el principio de superposición:

Probemos $$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

Tras sustituir,

$$-3Ax-2A-3B-3Cxe^{2x}+(2C-3E)e^{2x}$$

$$=4x-5+6xe^{2x}$$

Luego

$$A=-4/3,\ B=23/9,\ C=-2,\ E=-4/3$$

$$y_p = -\frac{4}{3}x+\frac{23}{9}-2xe^{2x}-\frac{4}{3}e^{2x}$$

$$y = c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{4}{3}x+\frac{23}{9}-\left(2x+\frac{4}{3}\right)e^{2x}$$

Determinar una y_p de $$y''-5y'+4y=8e^{x}$$

Solución:

Probemos: $y_p = Ae^x$

Tras sustituir: $0 = 8e^x$ (***conjetura incorrecta***)

El problema está en que la función complementaria es: $y_c = c_1e^{x} + c_2e^{4x}$
Y la suposición ya está presente en y_c.

Probemos como alternativa: $y_p = Axe^x$.

Tras sustituir: $-3Ae^x = 8e^x$

Entonces: $A = -8/3$,

$$y_p = (-8/3)xe^{2x}$$

- *Si ninguna función en la supuesta y_p es parte de y_c*

En la siguiente tabla se muestran soluciones particulares de prueba.

	$g(x)$	Forma de y_p
1.	1(una constante)	A
2.	$5x+7$	$Ax+B$
3.	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4.	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5.	$sen\,4x$	$A\cos 4x+B\,sen\,4x$
6.	$\cos 4x$	$A\cos 4x+B\,sen\,4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}sen\,4x$	$Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}sen\,4x$
11.	$5x^2sen\,4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Ex^2+Fx+G)\,sen\,4x$
12.	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+E)e^{3x}sen\,4x$

Hallar la forma de y_p de

(a) $y''-8y'+25y=5x^3e^{-x}-7e^{-x}$

Solución:

Tenemos que $g(x)=(5x^3-7)e^{-x}$ y probamos con

$$y_p=(Ax^3+Bx^2+Cx+E)e^{-x}$$

No hay duplicación entre los términos y_p e y_c

(b) $y'' + 4y = x \cos x$

Solución:

Probamos con $x_p=(Ax+B)\cos x+(Cx+E)\sin x$

Tampoco hay duplicidad entre los términos y_p y y_c.

Hallar la forma de y_p de $y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5sen2x + 7xe^{6x}$

Solución:

Para $3x^2$: $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$

Para -5 sen $2x$: $y_{p_2} = E\cos 2x + Fsen2x$

Para $7xe^{6x}$: $y_{p_3} = (Gx + H)e^{6x}$

Ningún término de $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ duplica un término de y_c

Así que la regla formal en este caso es que la **solución particular es una combinación lineal de las funciones linealmente independientes que se generan mediante diferenciaciones repetidas de g(x).**

¿Y cuál es la regla si la solución particular así propuesta es también una solución de la ecuación homogénea asociada?

> **Si alguna y_p contiene términos que duplican los términos de y_c, entonces esa y_p se debe multiplicar por x^n, donde n es el entero positivo más pequeño que elimina esa duplicación.**

Resolver $y''+y=4x+10\,senx,\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=2$

Solución: $y_c=c_1\cos x+c_2 senx$

Primero probamos: $y_p = Ax + B + C \cos x + E \operatorname{sen} x$

Pero hay una duplicación.

Entonces probamos con

$$y_p = Ax + B + Cx \cos x + Ex \operatorname{sen} x$$

Tras sustituir y simplificar,

$$A = 4,\ B = 0,\ C = -5,\ E = 0$$

Luego $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x$

Como $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, tenemos

$$y = 9\pi \cos x + 7 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x$$

Resolver $y''-6y'+9y=6x^2+2-12e^{3x}$

Solución:

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$$

$$y_p = \underbrace{Ax^2+Bx+C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}$$

Este término está duplicado, aparece ya en y_c.

Debemos probar con: $y_p = \underbrace{Ax^2+Bx+C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ex^2e^{3x}}_{y_{p_2}}$

Tras sustituir y simplificar,

$A = 2/3$, $B = 8/9$, $C = 2/3$, $E = -6$

Luego

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}$$

Resolver $y''' + y'' = e^x \cos x$

Solución:

$m^3 + m^2 = 0$, $m = 0, 0, -1$

$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$

Probamos como solución particular:

$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x$

Tras sustituir y simplificar,

$A = -1/10$, $B = 1/5$

Luego

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x senx$$

Hallar la forma de y_p de $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2 e^{-x}$

Solución:

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x}$$

Prueba: $$y_p = \underbrace{A}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^2 e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}}_{y_{p_2}}$$

Como aparece repetido en la solución homogénea, necesitaremos multiplicar A por x^3 y (Bx^2e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}) por x. Prueba ahora:

$$y_p = \underbrace{Ax^3}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^3 e^{-x} + Cx^2 e^{-x} + Exe^{-x}}_{y_{p_2}}$$

Método del anulador

Sigue los apuntes de Jose Olarrea.

Método de variación de parámetros

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

donde *P(x)*, *Q(x)* y *f(x)* son continuas en *I*. *Conocidas* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *soluciones l. i. de la ec. homogénea asociada, probaremos como solución particular:*

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Sustituimos y_p', y_p'' en la EDO:

$$y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p$$

$$= u_1\cancelto{0}{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]} + u_2\cancelto{0}{[y_2'' + Py_2' + Qy_2]}$$

$$+ y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + 2y_1'u_1' + 2y_2'u_2'$$

$$= \frac{d}{dx}[y_1u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2'$$

$$= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

Necesitaremos dos ecuaciones para encontrar valores de u_1 y u_1. Exijamos que: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$, *para obtener una ecuación adicional y de paso que la EDO se reduzca a:* $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$.

De modo que nos queda el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \end{array}\right\}$$

Expresado en términos de determinantes

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

donde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

De donde encontraremos, por integración, las soluciones.

Resolver $y''-4y'+4y=(x+1)e^{2x}$

Solución:

$m^2 - 4m + 4 = 0$, $m = 2$ (cero doble)

$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$,

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} \neq 0$$

Como $f(x) = (x + 1)e^{2x}$, entonces:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \qquad u_2' = \frac{W_2}{W} = -\frac{y_1 f(x)}{W}$$

$$u_1' = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \quad u_2' = -\frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x+1$$

$$u_1' = -x^2 - x\,, \qquad u_2' = x + 1$$

Luego

$u_1 =$ (-1/3)x^3 – ½ x^2, $u_2 =$ ½ $x^2 + x$

Recordemos que: $$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$

$$x_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)xe^{2x} = \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

Resolver $4y''+36y=\csc 3x$

Solución:

$y'' + 9y = (1/4)\csc 3x$

$m^2 + 9 = 0$, $m = 3i$, $-3i$

$y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, $f(x) = (1/4)\csc(3x)$

Como

$$W(\cos 3x\,,\sin 3x)=\begin{vmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}=3$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 3x\\ 1/4\csc 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\,,W_2=\begin{vmatrix}\cos 3x & 0\\ -3\sin 3x & 1/4\csc 3x\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \qquad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12}\,\frac{\cos 3x}{sen 3x}$$

Entonces $u_1 = -1/12\ x,$ $\qquad u_2 = -1/36\ \ln|sen 3x|$

$$y_p = -\frac{1}{12} x\cos 3x + \frac{1}{36}(sen 3x)\ln|sen 3x|$$

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2 sen 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(sen 3x)\ln|sen 3x|$$

Resolver $y''-y=\frac{1}{x}$

Solución:

$m^2 - 1 = 0$, $m = 1, -1$

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $f(x) = 1/x$, y $W(e^x, e^{-x}) = -2$

Luego $$u_1' = -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, u_1 = \frac{1}{2}\int_{x0}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$u_2' = -\frac{e^{x}(1/x)}{-2}, u_2 = -\frac{1}{2}\int_{x0}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt$$

$$y_p = \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt$$

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt$$

Ecuaciones de orden superior

Para las EDs de n-ésimo orden de la forma

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x)$$

tomamos $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots + u_ny_n$, donde y_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, son la familia de soluciones independientes que forman y_c. Así:

Suposiciones para simplificar la EDO:

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n' = 0 \\ y_1u_1' + y_2'u_2' + \cdots + y_n'u_n' = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

$$y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}u_n' = f(x)$$

Que nos lleva a las ecuaciones solución $u_k' = W_k/W$ con $k = 1, 2, \ldots, n$. Donde W es el wronskiano de la y's y W_k es el determinante que se obtiene de sustituir en W la k-ésima columna por (0, 0,..., f(x)).

Ecuación de Cauchy-Euler

Forma de ecuación de Cauchy-Euler

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

- ***Método de solución***

Probamos *y(x)* = x^m, donde debemos determinar m, para resolver la ecuación homogénea asociada: Observa que:

$$\begin{aligned} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= a_k x^k m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^{m-k} \\ &= a_k m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^m \end{aligned}$$

$$\left(a_n m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) + \ldots + a_1 m + a_0\right)x^m = 0$$

Ecuación auxiliar

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

Para $n = 2$, $y = x^m$, tenemos

$$(am(m-1) + bm + c)x^m = 0, \quad \text{o}$$

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

Observa que tenemos que ax^2 es igual a cero en x = 0. Para asegurar existencia y unicidad, tomaremos I = (0, ∞).

Caso 1: Raíces reales y distintas

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

Resolver $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Solución:

Tenemos $a = 1$, $b = -2$, $c = -4$

$$m^2 - 3m - 4 = 0, \; m = -1, 4,$$

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$$

Caso 2: Raíces reales repetidas

- Dedujimos $y_2 = x^{m_1} \ln x$

  Luego $$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$$

Resolver $4x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 8x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

Solución:

Tenemos $a = 4$, $b = 8$, $c = 1$

$4m^2 + 4m + 1 = 0$, $m = -½ , -½$

$$y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1/2} \ln x$$

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

- **Orden superior: multiplicidad k**

$$x^{m_1}\ ,\ x^{m_1}\ln x\ ,\ x^{m_1}(\ln x)^2\ ,\cdots,\ x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$$

- ***Caso 3: raíces complejas conjugadas***

$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta,$

$y = C_1 x^{(\alpha + i\beta)} + C_2 x^{(\alpha - i\beta)}$

Como

$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)$

$x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)$

Luego

$y = c_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + c_2 x^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \ln x)$

$= x^{\alpha} [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)]$

Resolver $4x^2y'' + 17y = 0,\ y(1) = -1,\ y'(1) = -\frac{1}{2}$

Solución:

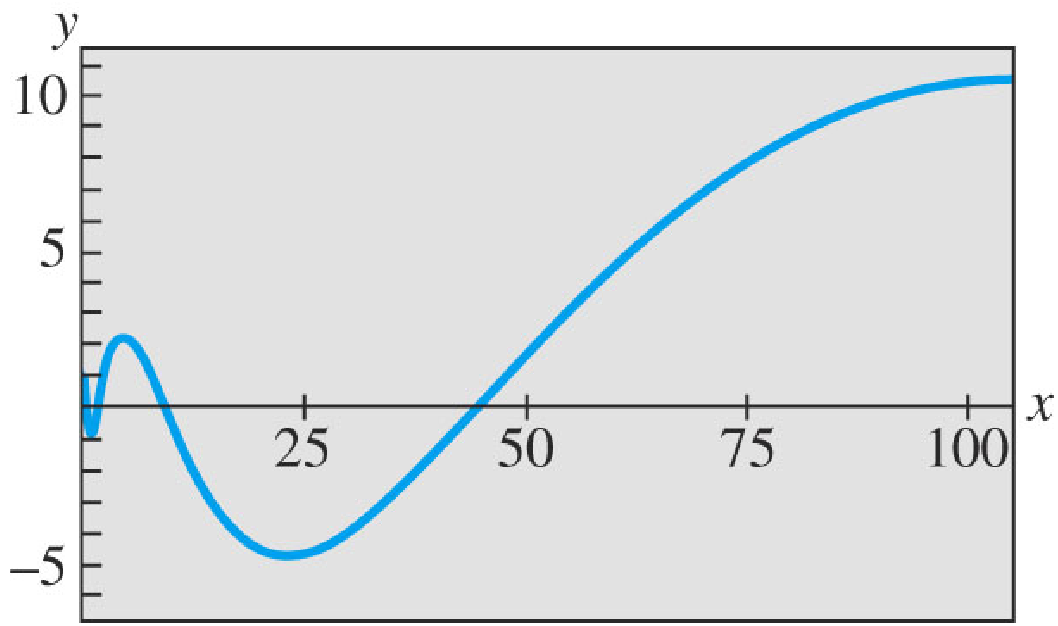
Tenemos $a = 4$, $b = 0$, $c = 17$

$$4m^2 - 4m + 17 = 0,\ m = ½ + 2i$$

$$y = x^{1/2}[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$$

Aplicando $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$, tenemos que $c_1 = -1$, $c_2 = 0$,

$$y = -x^{1/2} \cos(2 \ln x)$$



Resolver $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 8y = 0$

Solución:

Sea $y = x^m$,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}\ , \ \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}\ ,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

Luego tenemos $x^m(m + 2)(m^2 + 4) = 0$

$m = -2$, $m = 2i$, $m = -2i$

$y = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \ln x) + c_3 \sin(2 \ln x)$

Resolver $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$

Solución:

Tenemos $(m - 1)(m - 3) = 0$, $m = 1, 3$

$$y_c = c_1 x + c_2 x^3$$

Usando variación de parámetros,

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, donde $y_1 = x$, $y_2 = x^3$

Escribimos la ED como $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x^2 e^x$

Luego $P(x) = -3/x$, $Q(x) = 3/x^2$, $f(x) = 2x^2 e^x$

Así

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3 ,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x , W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

Hallamos

$$u_1' = -\frac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x, \quad u_2' = \frac{2x^5e^x}{2x^3} = e^x$$

$$u_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x, \quad u_2 = e^x$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^xx^3$$

$$= 2x^2e^x - 2xe^x$$

$$y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$$

Una ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir como un lineal de coeficientes constantes haciendo el cambio de variable: $x = e^t$. Por ejemplo: Resuelve así:

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln x$$

$$x = e^t$$

$$t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) =$$

$$-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln x$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t$$

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + 2 + t$$

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + 2 + \ln x$$

Unos ejemplos de ecuaciones no lineales

Resolver $y'' = 2x(y')^2$

Solución:

Esta ecuación no lineal carece de término en *y*.

Sea *u*(*x*) = *y*', entonces *du*/*dx* = *y*'',

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \qquad \frac{du}{u^2} = 2x\,dx \qquad -u^{-1} = x^2 + c_1^2$$

(*Se escribe en esta forma solo por conveniencia para luego integrar*)

Como $u^{-1} = 1/y'$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2 + c_1^2}$

Entonces, $y = -\int \dfrac{dx}{x^2 + c_1^2} = -\dfrac{1}{c_1}\tan^{-1}\dfrac{x}{c_1} + c_2$

Resolver $yy'' = (y')^2$

Solución:

Esta ecuación no lineal carece de término en *x*.

Sea $u(x) = y'$, entonces

$y'' = du/dx = (du/dy)(dy/dx) = u\, du/dy$

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2 \quad o \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

$\ln|u| = \ln|y| + c_1$, $u = c_2 y$ (*donde* $c_2 = \pm e^{c_1}$)

Como $u = dy/dx = c_2 y$, $dy/y = c_2\, dx$

$\ln|y| = c_2 x + c_3$,

$$y = c_4 e^{c_2 x}$$

- Supongamos que existe solución para:

$$y'' = x + y - y^2\ , \quad y(0) = -1\ , \quad y'(0) = 1$$

Si además suponemos que *y*(*x*) admite ***desarrollo en serie de Taylor*** centrado en 0:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

Como *y*(0) = -1, *y*'(0) = 1, de la ED original:

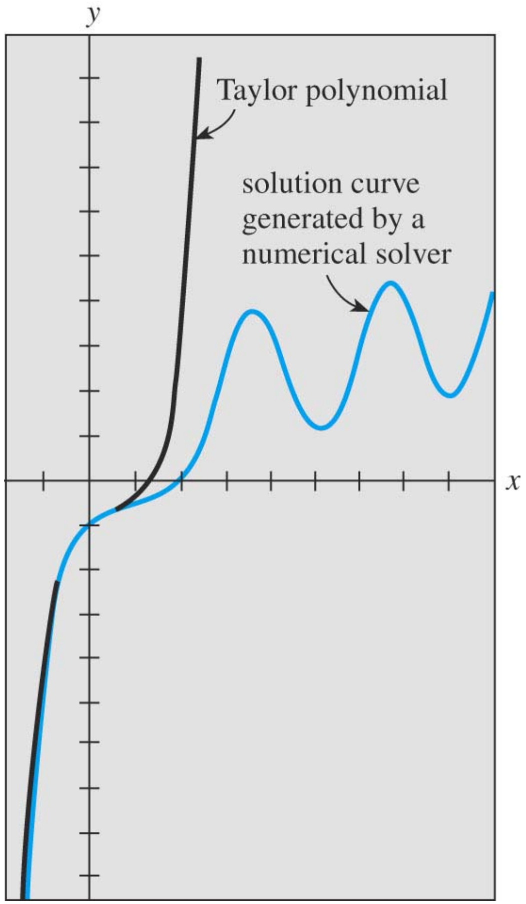
y''(0) = 0 + *y*(0) – *y*(0)^2 = −2.

Derivando sucesivamente la ED original:

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}(x + y - y^2) = 1 + y' - 2yy'$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(1 + y' - 2yy') = y'' - 2yy'' - 2(y')^2$$

... podemos utilizar el mismo método para obtener $y^{(3)}(0) = 4$, $y^{(4)}(0) = -8$, etc.



Y encontrar una aproximación en Taylor de la solución:

$$y(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

Una última observación: La ED de este ejemplo:

$$y'' = x + y - y^2\,, \quad y(0) = -1\,, \quad y'(0) = 1$$

es equivalente (mediante cambio de variable) al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = u \\ \dfrac{du}{dx} = x + y - y^2 \\ y(0) = -1, u(0) = 1 \end{cases}$$